Ильин Ю. А.[1]

О неравносильности двух определений единственности в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

В докладе рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1}$$

на некотором множестве $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,x}$, при этом $f \in C(G)$. Множество G предполагается либо областью, либо областью, к которой добавлены некоторые граничные точки, при этом должно выполняться $\overline{\operatorname{Int} G} = \overline{G}$. Ставится *задача Коши*

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

с начальной точкой $(t_0, x_0) \in G$. Мы рассматриваем высказывания «*точка* (t_0, x_0) *есть точка единственности*» и «*задача Коши (2) имеет единственное решение*» как эквивалентные. Единственность трактуется как локальное свойство начальной точки. В учебной литературе имеется два популярных варианта определения локальной единственности (мы не будем в тезисах приводить ссылки на соответствующие учебники).

Определение 1. *Говорят, что задача Коши (2) имеет единственное решение, если для любых двух ее решений* $\varphi(t)$ *и* $\psi(t)$ *можно указать такой интервал* $(a, b) \ni t_0$*, что* $\varphi \equiv \psi$ *на* (a, b).

Определение 2. *Говорят, что задача Коши (2) имеет единственное решение, если у нее существует такое решение* $\varphi(t)$*, определенное на некотором интервале* $(a, b) \ni t_0$*, что для любого другого её решения* $\psi(t)$*, определенного на* $< a_1, b_1 > \ni t_0$*, выполняется* $\varphi \equiv \psi$ *на* $(a, b) \cap < a_1, b_1 >$.

Замечание. Если начальная точка берется на границе G, то в определениях надо брать соответствующие полупромежутки.

Если использовать тот факт из теории продолжения решений, что любое решение задачи Коши (2) продолжается на отрезок Пеано $I = [t_0 - h, t_0 + h]$, то можно не умаляя общности считать, что любое

[1]Ильин Юрий Анатольевич, доцент, Санкт-Петербургский государственный университет

решение задачи (2) как минимум сразу определено на I. Тогда Определение 2 можно переформулировать следующим эквивалентным образом:

Определение 2*. *Говорят, что задача Коши (2) имеет единственное решение, если существует такой промежуток* $[t_0 - h, t_0 + h], h > 0$, *что любые два решения задачи Коши (2) на нем совпадают.*

В этом варианте лучше видна разница между 1-ым и 2-ым определениями: в 1-ом для любых двух решений промежуток равенства может быть своим, а во 2-ом должен существовать общий промежуток, на котором все решения совпадают.

Очевидно, что из определения 2 следует определение 1. Для скалярного дифференциального уравнения, в случае когда (t_0, x_0) является внутренней точкой $G \subset \mathbb{R}^2$, несложно доказать обратное: что из определения 1 следует определение 2. Таким образом, эти определения оказываются эквивалентными. Выяснилось, однако, что если начальная точка лежит на границе G, то из определения 1 уже не будет следовать 2, и они будут описывать разные картины поведения решений [1]. Возникает вопрос: а будут ли определения 1 и 2 эквивалентными для многомерных систем в случае внутренней начальной точки? В существующей литературе автору не удалось обнаружить ответа на этот вопрос, хотя возможно, что автор плохо искал. Ответ оказался отрицательным: определения 1 и 2 (=2*) не эквивалентны и допускают, вообще говоря, сильно разное поведение решений. Автору удалось построить такую систему (1) второго порядка, определенную на всем $G = \mathbb{R}^3$, для которой в точке $(0, 0)$ выполняется 1-ое, и не выполняется 2-ое определения. Изложение найденного примера и является главной целью доклада. Поскольку пример строится геометрически, то даже короткое его описание в тезисах, к сожалению, невозможно.

Полученный результат в некотором роде оказался неожиданностью для самого автора. Получается, что надо делать выбор между определениями 1 и 2 (или 2*). В пользу определения 1 говорит простота его формулировки. Но это и всё. По мнению автора, правильный выбор — это определение 2. Доводы следующие:

1. Любой коэффициентный признак единственности (такой как дифференцируемость, условие Липшица, критерий Осгуда и т. п.) влечет ровно то поведение решений, которое описывается в определении 2: действительно будет существовать общий отрезок, на котором все решения совпадают.

2. Определение 2 лучше согласуется с физическим принципом детер-

минированности, математической калькой которого и является понятие единственности в теории дифференциальных уравнений. Принцип гласит, что знание закона движения (т. е. дифференциального уравнения) и начального положения точки (начального условия) однозначно определяет положение точки в последующие моменты времени. В построенном контрпримере, для точки $(0,0)$ выполняется определение 1, но решения целиком заполняю некоторый конус. Ни о какой детерминированности процесса говорить не приходиться.

3. И наконец, третий довод, который для многих моих коллег может иметь решающее значение. В теории дифференциальных уравнений распространено важное убеждение, что непрерывная зависимость решений от начальных данных эквивалентна свойству единственности решений. То есть, предполагая всего лишь, что решения обладают свойством единственности, можно доказать, что они непрерывно зависят от начальной точки (см. такое доказательство в [2], §19). Для сохранения этой эквивалентности мы должны брать именно определение 2. Если выбрать определение 1, то упомянутая эквивалентность не будет иметь места, что сразу видно из построенного примера. Соответственно, с помощью определения 1 доказать теорему об интегральной непрерывности не получится.

Список литературы

[1] Басов В. В., Ильин Ю. А. О задаче Коши, поставленной на границе области определения обыкновенного дифференциального уравнения. //Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 4. С. 636–648.

[2] Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970.